

# 實驗計畫法用以推行工業污染防治個案研究

謝德遠\*

## 摘要

本文以實驗計畫者的眼光，將幾個生活實例與工業污染防治實驗實例分別予以剖析。首先，指出未能依照實驗計畫法進行的污染防治實驗常是效率很差的，並以某染整廠廢水化學試驗為例。其次，介紹實驗計畫法（亦稱直交表設計法或田口式品質工程的參數設計）在日常生活中常應用的二個例子。一則強調實驗計畫和考核比實驗執行更重要。再則顯示實驗設計有助於變數的敏感度分析。三則表示不具工程專業的人士也易學易用。最後，才教導工程師們應用簡單的直交表設計及線性迴歸式有效地解決三個國內工業污染防治個案。這三個案例分別是能資所用噴霧塔的排煙脫硫程序的最適化、中油公司高雄總廠二輕廢氣回收初餾塔的稀釋蒸汽進料水含油量降低 1,000倍，及某印刷電路板廠鋅錫不合格廢板減少 95%。

## 一、前言

對每一位從事工業污染防治研究的工程師而言，統計方法可說是從有限的實驗數據，獲得合理結論或推估的唯一科學方法<sup>(1)</sup>。特別是在污染防治實驗或製程改善實驗的操作變數又多，實驗結果的變動及誤差甚大，容易導致誤解或爭議時，更需要採用統計法<sup>(1)～(3)</sup>。可惜的是，在過去十年所發表的工業污染防治論文當中，很少有作者有次序地就 1. 過去實驗者所犯的通病；2. 實驗者如何設計實驗，可以在較短的時間內，取得大量有效的資訊；及 3. 工程師如何利用實驗計畫法來有效地進行製程改善達到工業減廢目的等，作一綜合性的批評與建議。

撰寫本文的目的有三。1. 指出在同一繁複的實驗程序（如染整廢水化學混凝處理）當中，實驗人員固定幾乎所有的變數，而每次僅僅變動一個分離的因素 (changing one separate factor at a time, 即 COST) 的方法是最低效率的<sup>(3)</sup>。2. 導出直交表的特性及規則性，有助於您的問題解決 (problem solving)。3. 學習了實驗計畫法之後，工程師在污染防治輔導與推廣工作上，將更容易得心應手。

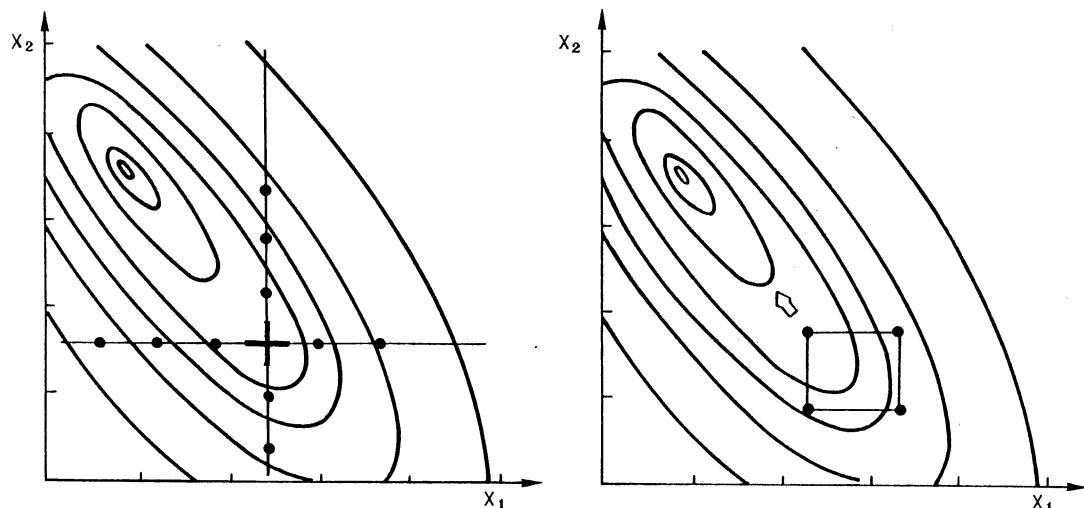
\*中鼎工程股份有限公司環境工程專案室專門技術經理

## 1.1 為什麼用COST的實驗方法是低效率的

求學期間所用的COST的實驗方法有個基本假設，那就是系統中所有的因素之間是沒有交互作用(interaction)存在的<sup>(3)</sup>。以圖1為例，當兩個因素X<sub>1</sub>與X<sub>2</sub>構成一垂直平面，而有交互作用時，則反應面(response surface)常呈現橢圓形或拋物形。也就是說，橢圓或拋物線的軸線，並不常與因素(X)的軸平行。自然而然地，如圖1 A所示，每次測試僅僅變動一個分離的因素的方法(COST)因為搜尋被阻留在山脊(ridge)所求得的局部地區(local region)最佳值，並不代表是全部待搜尋區域的真正的最佳值，只是枉費了十一次測試罷了。

在另一方面，如圖1 B示，實驗者採用兩因素的完全要因配置法(full factorial design)。雖然只進行了4次測試，但經由實驗數據的迴歸分析(regression analysis)，獲得了未來有利的實驗進行方向的訊息，所以說，圖1 B的實驗策略比圖1 A的COST法要略勝一籌。

在多變數的場合，用COST實驗方法也往往是事倍功半的。在附錄一及附錄二當中，我們抄錄了國內某些染整廠的廢水化學試驗報表<sup>(9)</sup>。明顯地，由於實驗者採用COST方法，在兩批共12次的實驗數據中，實在無法告訴我們，是添加物(Ⅱ)的種類重要呢？還是添加物(Ⅱ)的加量或反應時間重要呢？這些數據也沒法告訴我們為什麼COD無法降到200 ppm以下的關鍵因素有那些？換句話說，廢水廠實驗人員在未能規則地變動16個操作變數的情況下，致各變數對COD去除率及透視度提高之影響(effect)無法得知。



A. 每次測試只變動一個因素(COST)致獲得一虛假的最高點(+號處)，遠離了真正的最高點。

B. 同時地改變兩個因素，搜尋一正方形區域，快速地找出新的搜尋方向，致易找到新高點。

圖1 一簡單的程序受到兩個因素X<sub>1</sub>及X<sub>2</sub>的交互作用的影響所構成的反應曲面y

## 1.2 實驗計畫法的趨向與實驗設計的目的

實驗計畫法 (experimental design) 已有三十餘年歷史。它是以統計學為內涵，通過實驗的方法，提高資訊 (information) 獲得效率的共通技術。利用實驗計畫法及最簡單的線性迴歸 (linear regression) 模式，我們只須要作非常少的實驗次數，就能夠把實驗結果或目標函數值的某種傾向或型態 (pattern) 清晰地顯示出來<sup>(1) ~ (8)</sup>。

傳統的實驗計畫法側重 2階 (two levels) 及 3階的直交表查表運用及變異數分析、F比值 (F ratio) 判定各因素 (factor) 的顯著性等，十分繁瑣；現代的實驗計畫法則強調目標函數的轉換，及以最小平方和 (least-square sum) 為內涵，求取簡單的線性一次迴歸係數為主，不僅便捷，而且可從實際生活中體驗、易學易用。因此，本文以現代的實驗計畫法之介紹為主<sup>(1)</sup>。

我們應用實驗計畫的目的或設計 (design) 的場合有三種。1. 是繁複製程或初期實驗用以篩選變數 (screening variables) 時。2. 是關鍵因素已經掌握，要求取最適的操作條件 (optimizing condition) 時。3. 是求取反應曲面模式 (response surface modeling) 用以判定目標函數的趨向及推估最佳值時。

為了判定各因素的影響是否顯著，我們通常把各因素予以代碼化。即各因素的操作範圍的下限訂為 -1，上限定為 +1。如此，在一次線性迴歸式子當中，凡迴歸係數愈大者，就代表該因素的效應 (effect) 愈顯著。

換句話說，實驗計畫幫助我們在一定的控制因素範圍內，可進行各函數  $Y(x)$  的敏感度分析 (sensitivity analysis)。這在附錄一及附錄二的實驗數據分析中是無法做到的。

## 1.3 實驗計畫法的普及化及專業化

許多人一聽到統計學或是 COST 誤人不淺就會頭大，並誤以為學習實驗計畫法是很困難的事。事實上，您只要稍具工程數學基礎，花上 6 到 8 個小時，耐心看完幾個例題，就可以派上用場了。為了激發工程師的學習興趣，在附錄三及四當中，我們編寫了兩則應用實驗計畫法在日常生活中的宣導例子。在附錄五中，我們導出如何以最小平方和法求取線性迴歸式的一次係數。

表 1 為實驗計畫法在日常生活與工業污染防治工作上之三個應用的實例<sup>(9) ~ (14)</sup>。

表 1 實驗計畫法在日常生活與工業污染防治工作上之應用

| 序號 | 實驗設計型態    | 案例編號        | 生活應用實例或污染防治專案名稱                | 涵蓋的相關產業   | 學習人員的相關專長     | 實例的自變數數目<br>NO.of x | 實例的依變數數目<br>NO.of y | 選用的直交表         | 迴歸分析的函數形式                                  |
|----|-----------|-------------|--------------------------------|-----------|---------------|---------------------|---------------------|----------------|--|
| 1  | 每次變動一個變數  | 附錄一、附錄二     | 染整廢水處理實驗<br>透視度的解決             | 染 整       | 一 般           | 16                  | 4                   | 無              | 無  |
| 2  | 反應曲面模式    | 附 錄 三       | 搭乘國光號時如何免曬太陽                   | 不 限       | 一 般           | 3                   | 1                   | L <sub>8</sub> | y(x)                                       |
| 3  | 篩選變數      | 附 錄 四       | 如何有效地確認通用新台幣幣值                 | 不 限       | 一 般           | 7                   | 1                   | L <sub>8</sub> | y(x)                                       |
| 4  | 程 序 最 適 化 | 例 一         | 濕式石灰石煙道氣除SO <sub>2</sub> 實驗最適化 | 能 源       | 環 工 化 工       | 4                   | 1                   | L <sub>9</sub> | y(x)                                       |
| 5  | 篩選變數      | 例 二 及 附 錄 五 | 二輕蒸氣進料水含油量偏高的解決                | 煉 油       | 品 管           | 4                   | 1                   | L <sub>8</sub> | log y(x)                                   |
| 6  | 篩選變數      | 例 三         | 鋅錫成品不良品率的降低                    | 印 刷 電 路 板 | 化學、化工<br>經濟企劃 | 6                   | 3                   | L <sub>8</sub> | log( $\frac{P}{P_{\max}-p}$ ) <sup>*</sup> |

\* 新變數 P = 0.1y<sub>1</sub> (無缺陷) + 0.25y<sub>2</sub> (有些缺陷) + 0.65y<sub>3</sub> (嚴重缺陷)

## 二、直交表設計應用於日常生活實例二則

### 2.1 如何搭車選乘作位置免曬太陽

我們到工廠進行污染防治輔導工作時，常搭車前往，在閉目養神之餘，可曾想過，搭車時間、行車方向、選擇座位位置與曬到太陽與否之間的規則性如何？

在附錄三當中，我們應用直交表設計概念，提供了一個參考性的解答。也就是說，首先設定代表符號，早上為「+」，下午為「-」；車行方向上，則是北上為「+」，南下為「-」，這屬於行程的「計畫」部份。而在執行作業時，上車者選定車上的位置，則以靠司機的一側為「+」，靠車門的一側為「-」。接著，在考核時，則以晒到太陽為「+」，晒不到太陽為「-」。最後，依據 8次搭車實驗結果，列成一個 Y (X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, X<sub>3</sub>) 的函數關係表。應用了此直交表的規則性（每直行的正負號各半），我們將 Y 與 X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, X<sub>3</sub> 及 X<sub>1</sub>X<sub>2</sub>, X<sub>2</sub>X<sub>3</sub>, X<sub>3</sub>X<sub>1</sub> 與 X<sub>1</sub>X<sub>2</sub>X<sub>3</sub> 逐行比對，就會發現

$$Y = -(X_1 X_2) X_3 \quad \dots \quad (1)$$

假定我們搭車，不想晒到太陽，在此例中，Y為負值。由式(1)，X<sub>3</sub> 需與 X<sub>1</sub> X<sub>2</sub> 同號。也就是說，當時間(X<sub>1</sub>)與方向(X<sub>2</sub>)之積為正，則選擇靠司機一側的位置(X<sub>3</sub> 為+)。若時間與方向之積為負，則應選擇靠車門的座位。

在日常生活裡，我們常與七種新台幣為伍，也都知道它們的面值從 1 元到 1,000 元。假如說，一種新台幣代表一個操作變數。那麼在遇到一個包含 7 個操作變數的製程當中

，我們是否可用七種新台幣及直交表來做模擬實驗呢？

## 2.2 敏感分析與新台幣幣值的認定

直交表的巧妙，是因為它能夠快速有效的掌握問題<sup>(15)</sup>。其理由很簡單，從柏拉圖(Pareto)的分析方法得知，影響一個目標函數(Y)的關鍵變數通常只是少數幾個而已，其他次要變數卻有許多。因此，我們只需要一點數理基礎及技巧去選擇少數的代表性實驗。由於變數(X)有交互關係的系統，各變數的敏感度(sensitivity)並不是一個定值。所以，若依傳統的實驗方法，我們每次幾乎固定所有的變數，而僅改變一個變數(COST)，所得到的敏感度或迴歸式 $Y(X) = \sum_{n=1}^n \alpha_i X_i$ 中的係數 $\alpha_i$ 並不可靠。然而，在使用直表的實驗中，我們每次改變近乎一半的變數的狀態(state)或水準(level)。因此，對於敏感度的計算，是使用統計平均的方法，所以算出的敏感度值比用傳統的實驗方法獲得者更可信靠。

直交表的實驗中（或模擬）方法，非常有效。例如有一個 7個變數的系統，每個變數都有大、小之分或取、捨之分，若被要求求出所有的敏感度值，傳統的實驗方法必須作 $2^7 = 128$ 次實驗。然而使用L<sub>8</sub>直交表，我們只需做8次實驗，即能得到統計的敏感度值。所以說，以極少的實驗，得到最有代表性的結果。

在附錄四當中，我們模擬-L<sub>8</sub>直交表，教您求出因子A、B、C、D、E、F及G所代表的新台幣值<sup>(11)</sup>。每個因子都有兩種水準，水準 0表示不取；水準1表示取1張鈔票。每次實驗，您從因子D、E、A、B、C、F及G都要選定一次，這相當於在模擬進行一次物理／化學實驗時，所有的變數（或操作條件）要選定一種水準是一樣的道理。在這範例中，每次實驗，目標函數Y就選定為您所取之新台幣面值的總和。比較相鄰兩個實驗狀況（例如#1及#2），變數水準（0或1）換了一半。在做完 8次實驗之後，您會發現，每個因子都有 4次被取到 1張（水準 1）及 4次未被取到（水準 0），也就是機會各半。接著把每行的各因子在水準 1及 0的總和求出，兩者相減，可求統計平均差異。而迴歸式 $Y = 1000D + 500E + 100A + 50B + 10C + 5F + G$ 就可獲得了。也就是說，因子D的幣值（或敏感度）恰為因子 F的幣值（或敏感度）的 200倍，即與實際狀況完全相符。由於在做直交表的規劃時，因子G的水準是借用因子AB及C的乘積，您不能判定附錄四的迴歸式中用式(1)的G，還是用式(2)中的ABC為佳。由於閣下已知因子 A (100元)與因子B (50元)及C (10元)的乘積，不可能是 1元，即可判定式(1)較為正確。在這範例中，因子交互作用的水準(level)之規則性為，令水準1=1+1及水準0=-1，則利用正正得正，正負得負及負負得正之原理，即可導出各行的水準了。在下面的三個例子中，我們將介紹用直交表應用於工業減廢的例子，所不同者，各因子(factor)的兩個水準或階次，改換成-1與+1而已。若為三階次 則選用-1 0, 及+1。於是直交表內各直線的和，即 $\Sigma A = \Sigma B = \Sigma C = \Sigma D \dots$ 均為零，構成直交的(orthogonal)特性。於是在用聯立方程式解迴歸係數時，非常簡易便捷（參閱附錄三、附錄四及附錄五）。

## 2.3 直交表設計用於增進噴霧塔吸收SO<sub>2</sub> 去除效率

學會直交表設計，您就可以臨危授命，在四個控制因素及每個因素各為三階次 (level) 情況下，共進行10次實驗測試，求得噴霧塔吸收SO<sub>2</sub> 去除效率的極大值94%<sup>(12)</sup>，詳述如下。

能資所於煙道氣除硫系統實驗中，假定二氧化硫入口濃度(SO<sub>2</sub> conc.)、液一氣比(L/G)、鈣硫比(Ca/S) 及降載率(TR)為控制因素，而每個控制因素有三階次 (三個實驗值)。以噴霧塔為例，其部份因素的(partial factorial) 實驗設計及測試結果如表2及表3所示<sup>(12)</sup>。利用表2及表3，我們可以作各因素對SO<sub>2</sub> 去除率(y)的敏感度分析及求出最佳操作條件，並與原作者的第10次測試結果相比較。

表2 噴霧塔吸收SO<sub>2</sub> 的實驗設計及操作範圍

| 因素符號 | 階 次                                  | +     | ○     | -    |
|------|--------------------------------------|-------|-------|------|
| A    | SO <sub>2</sub> 濃度(ppm)              | 1,800 | 1,000 | 600  |
| B    | L/G (L/m <sup>3</sup> )              | 15    | 10    | 8    |
| C    | Ca/S (mole/mole)                     | 1.2   | 1.0   | 0.9  |
| D    | TR (m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ) | 1.0   | 0.86  | 0.71 |

表3 能資所噴霧塔部份因素實驗設計法實驗測試及分析結果

| 項目<br>次數 | A     | B     | C | D | SO <sub>2</sub> | L/G | Ca/S  | TR    | 除 硫<br>效 率 |
|----------|-------|-------|---|---|-----------------|-----|-------|-------|------------|
| 1        | +     | +     | + | + | 1,800           | 15  | 1.2   | 1.0   | 0.84       |
| 2        | +     | ○     | ○ | ○ | 1,800           | 10  | 1.0   | 0.86  | 0.74       |
| 3        | +     | -     | - | - | 1,800           | 8   | 0.9   | 0.71  | 0.64       |
| 4        | ○     | +     | ○ | - | 1,000           | 15  | 1.0   | 0.71  | 0.90       |
| 5        | ○     | ○     | - | + | 1,000           | 10  | 0.9   | 0.1   | 0.84       |
| 6        | ○     | -     | + | ○ | 1,000           | 8   | 1.2   | 0.86  | 0.78       |
| 7        | -     | +     | - | ○ | 600             | 15  | 0.9   | 0.86  | 0.93       |
| 8        | -     | ○     | + | - | 600             | 10  | 1.2   | 0.71  | 0.82       |
| 9        | -     | -     | ○ | + | 600             | 8   | 1.0   | 1.0   | 0.76       |
| 階次"+"之平均 | 0.740 | 0.813 |   |   | 0.890           |     | 0.813 |       |            |
| 階次"○"之平均 | 0.840 | 0.800 |   |   | 0.800           |     | 0.817 | 0.806 |            |
| 階次"-"之平均 | 0.837 | 0.803 |   |   | 0.727           |     | 0.787 |       |            |

在表 3 中，例如  $\text{SO}_2$  (因素 A) 對除硫效率 ( $y$ ) 的影響為  $(0.84 + 0.74 + 0.64)/3 = 0.740$ 。參考附錄四及附錄五。各因素在各階次 (三個實驗值) 的平均值，如表 3 所示。也就是說，最佳的操作條件為 A◦B+C+D◦，亦即  $\text{SO}_2$  濃度為 1,000 ppm；液氣流量比 (1/g) 為<sup>(12)</sup>；鈣／硫莫耳比為 1.0~1.2，煙氣流量  $420\text{m}^3/\text{hr}$  (降載率為 1.0)。

由表 3 數據解析及九次測試平均值 0.806 我們可以推估一測試結果的準確性。譬如說，第七次實驗為 A◦B+C+D◦ 則推估的  $\hat{y}$  (讀音為 head) 值如下：

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 0.806 + (0.837 - 0.806) + (0.890 - 0.806) + (0.803 - 0.806) + (0.817 - 0.806) \\ &= 0.806 + 0.03 + 0.084 - 0.003 + 0.011 \\ &= 0.929\end{aligned}\quad (2)$$

與實驗值 0.93 相符。

同理，在最佳的操作條件 A◦B+C+D◦ 時，預測最大的  $y$  值為：

$$\begin{aligned}\hat{y}_{\max} &= 0.806 + (0.840 - 0.806) + (0.890 - 0.806) + (0.813 - 0.806) \\ &\quad + (0.817 - 0.806) \\ &= 0.806 + 0.034 + 0.084 + 0.007 + 0.011 \\ &= 0.942\end{aligned}\quad (3)$$

此與能資所第 10 次測試結果  $y = 0.94$  相符。

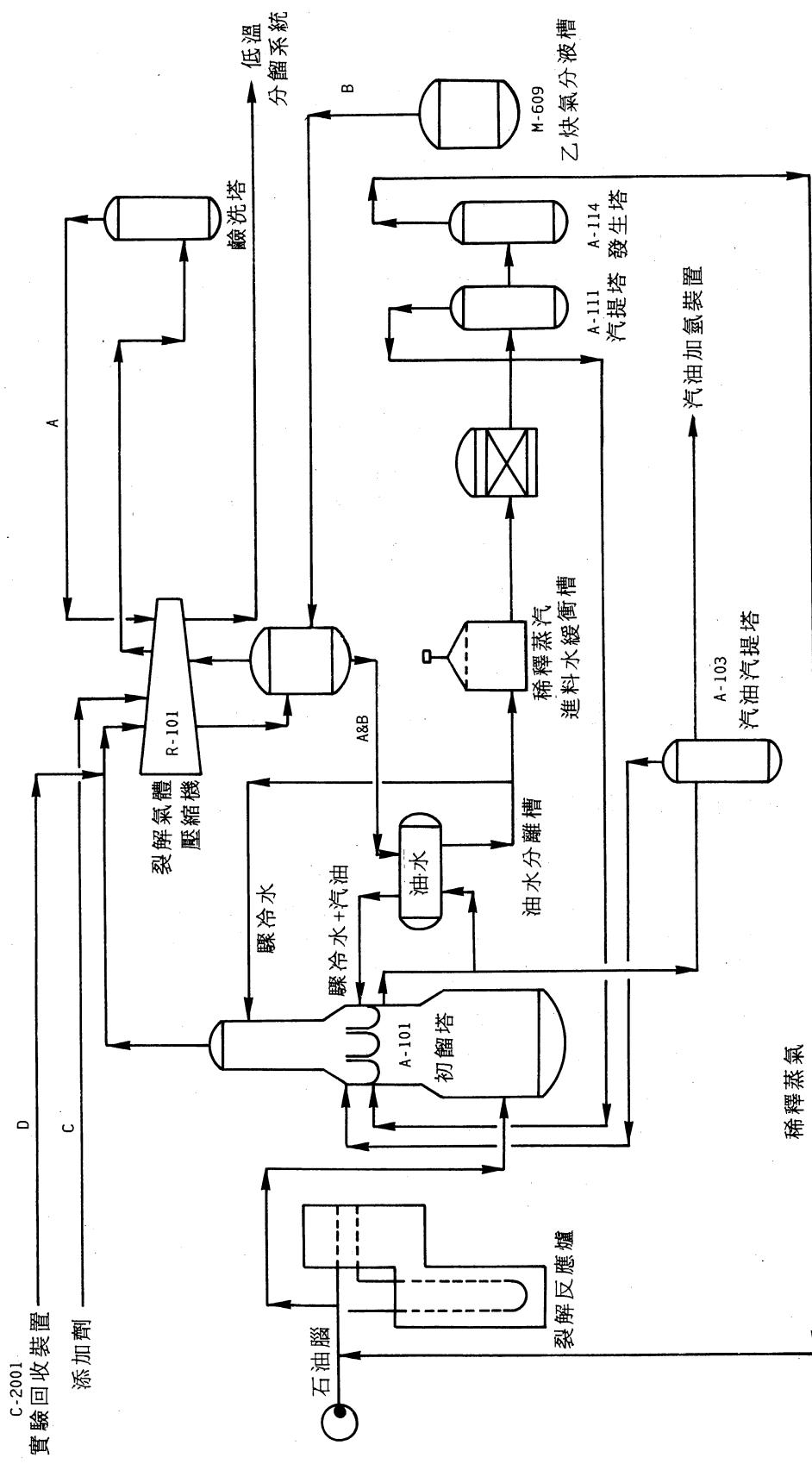
### 三、直交表設計應用於廢氣回收初餾塔的改善

#### 3.1 裝程說明及初餾塔裂解汽油終餾點的控制

中油公司高雄煉油總廠執行政府經濟政策，於民國 64 年完成第二輕油裂解工場，帶動石化工業之起飛。該工場主要產品有乙烯、丙烯、丁二烯、苯、甲苯、二甲苯、裂解汽油、碳煙進料油和燃料油等，供應大社、仁武石化工業區中、下游工場之主要進料，以供生產各類石化產品<sup>(13)</sup>。

第二輕油裂工場採用美國 STONE & WEBSTER 工程公司專利方法。以石油腦為進料，在高溫裂解反應爐進行裂解反應，反應物經熱回收裝置及初餾塔，再經壓縮、鹼洗、低溫分餾等設備，生產各類烯烴產品。

如圖 2 所示，石油腦混合稀釋蒸汽進入裂解反應爐裂解，再進行初餾塔分離汽油等質油，其餘較輕氣體經壓縮、鹼洗、再送低溫分餾系統。稀釋蒸汽在初餾塔的驟冷段冷凝，稱為驟冷水。驟冷水一部份送往稀釋蒸汽發生系統以便回收使用，故稱為稀釋蒸汽進料水，另一部份的驟冷水則泵循環回初餾塔，是稱為驟冷循環水。實際上稀釋蒸汽進料水和驟冷循環水完全是相同的水。



輕裂工場於76年度歲修期間，打開初餾塔，檢查內部結構發現情況良好，然而操作期間，裂解汽油終餾點遠高於500°F以上。經該場員工檢討，發現汽提塔（汽油汽提塔和稀釋蒸汽進料水汽提塔）塔頂油氣，進入初餾塔的噴嘴未加入檔板(baffle)，使得油氣和汽提蒸汽直接把驟冷段的水吹入下層分餾板所致。經該場人員分別加裝檔板之後，歲修後開爐，裂解汽油品質大為改善，終餾點在400~430°F，已達成控制在500°F以下的目標。

### 3.2 蒸汽進料水含量偏高的解決

但是在汽油品質已見改善的情況下，稀釋蒸汽進料水卻仍是含油量(y)偏高。經二輕工場人員探討各項可能要因後，決定應用實驗計畫法，亦即直交表的設計，探討影響顯著的因子，並謀求解決的辦法。此處，筆者把進料水含油量偏高的問題解決的過程，改寫成題二。首先決定試驗方法。該場採用直交排列法，先列出可能之四項影響因素，每24小時改變一種或數種操作條件。等到每次實驗穩定後，取樣分析稀釋蒸汽進料水含油量。其次決定因素及階次(level)如表4所示：

表4 二輕稀釋蒸汽進料水含油量偏高解決的實驗設計

| 因 素            | 階 次      |                 |
|----------------|----------|-----------------|
|                | -        | +               |
| A：稀釋蒸汽進料水鈉離子濃度 | 小於0.1ppm | 大於0.1ppm        |
| B：M609乙炔氣      | 不予回收     | 回收進入裂解<br>氣壓縮系統 |
| C：沖洗油和抗聚合藥劑    | 停止注入     | 注入              |
| D：廢氣回收壓縮機出口油氣  | 停止回收     | 回收入系統           |

接著列出L<sub>8</sub> 直交表配置及實驗結果，如表5所示。最後利用直交表特性及參照附錄五的解法，讀者可自行求得 $\log y$  的迴歸式如下：

$$\log y = 2.656 + 1.462A + 0.136B - 0.060AB + 0.018C - 0.009D \quad \dots \quad (4)$$

最後，由式(4)得知，最佳操作條件為A<sub>-</sub>B<sub>-</sub>C<sub>-</sub>D<sub>+</sub>，即第8次的實驗結果。令A=-1，B=-1，C=-1及D=+1，代入(4)式，預測（常用 $\hat{y}$ 符號表示）最低的 $\log \hat{y}$ 值為0.971，或 $\hat{y}=9.4\text{ppm}$ ，與實驗值9.0ppm相較，誤差為4%。

換句話說，由表5及式(4)顯示，影響乳化現象非常顯著的是A因子，其次B因子和AB。而添加劑(C因子)和C2001油氣(D因子)則幾無影響。

表 5 直交表設計應用於二輕稀釋蒸汽進料水含油量(y)的控制

| 因 素   | A               | B      | AB     | C      | D        | y      | $\log y$ |
|-------|-----------------|--------|--------|--------|----------|--------|----------|
| #     | Na <sup>+</sup> | M609油氣 | -      | 添加劑    | C2001油 氣 | mg/L   |          |
| 1     | +               | +      | +      | +      | +        | 16,520 | 4.211    |
| 2     | +               | +      | +      | -      | -        | 15,000 | 4.176    |
| 3     | +               | -      | -      | +      | +        | 11,050 | 4.043    |
| 4     | +               | -      | -      | -      | -        | 11,000 | 4.041    |
| 5     | -               | +      | -      | +      | -        | 25     | 1.398    |
| 6     | -               | +      | -      | -      | +        | 24     | 1.380    |
| 7     | -               | -      | +      | +      | -        | 11     | 1.041    |
| 8     | -               | -      | +      | -      | +        | 9      | 0.954    |
| "+"之和 | 16.471          | 11.165 | 10.382 | 10.693 | 10.588   | -      | 21.244   |
| "-"之和 | 4.773           | 10.079 | 10.862 | 10.551 | 10.656   | -      | 0        |
| 兩列之和  | 21.244          | 21.244 | 21.244 | 21.244 | 21.244   | -      | 21.244   |
| 兩列之差  | 11.098          | 1.086  | -0.480 | 0.142  | -0.068   | -      | 21.244   |
| 效 應   | 2.924           | 0.272  | -0.120 | 0.036  | -0.017   | -      | 2.656    |

#### 四、直交表設計應用於焊錫製程的改善

#### 4.1 目標函數轉換之商榷

在例題二的問題解決中，我們曾用對數轉換，得到令人滿意的迴歸式，即式(4)。但在遇到涉及產品不良率的場合，由於不良率值  $P$  恒在 0 與 1 之間。故為了求得令人滿意的線性迴歸式，常需作「 $\Omega$  轉換」。也就是將範圍在  $0 \sim 1$  的數據轉換成範圍為  $-\infty$  至  $+\infty$  的數據。一般教科書上所用的  $\Omega$  轉換是：

然而，式(5)的形式並不是一成不變的。式(5)有個基本特性，即 $\Omega = 0$ 在 $P = 0.5$ 處。同理，在一組實驗數據中，我們算出其不良率的統計平均值 $P_{av}$ ，則假定系統的最大不良率值， $P_{max} = 2P_{av}$ ，應比用 $P_{max} = 1$ 更合理。也就是說，在涉及不良率的場合，用新變數

$\gamma = \log\left(\frac{P}{P_{\max} - P}\right)$  就可能比用  $\Omega$  轉換為佳。目標函數有時可以為幾個實驗值（或稱分類

計數值)的加權總和 (weighted sum)。我們在下面的例題三當中，以印刷電路板孔洞缺陷之改善 (即減少固體廢棄物) 作一說明。

#### 4.2 焊錫後印刷電路板上孔洞內缺點數之改善

在焊錫後，印刷電路板上孔洞會有缺陷產生。由於此種缺陷無去量測，僅能從外觀定性的判定其好壞，因而將它視為一種分類計數值<sup>(14)</sup>。本實驗將其分成三類，如下：

$Y =$ 孔洞內的缺陷

| 缺陷分數  |    |
|-------|----|
| $Y_1$ | 無  |
| $Y_2$ | 有些 |
| $Y_3$ | 嚴重 |

採用  $L_8$  直交表，針對下列因素進行實驗：

| 控 制 因 素     | 水準1(+) | 水準2(-) |
|-------------|--------|--------|
| A : 助熔劑型態   | 目前條件   | 新型態    |
| B : 助熔劑密度   | 低      | 高      |
| C : 焊錫溫度    | 低      | 高      |
| D : 焊波振幅    | 低      | 高      |
| E : 預熱設定    | 3      | 6      |
| F : 助熔劑氣刀角度 | 45°    | 90°    |

交互作用：A × B

實驗一共做了 8種重複20次(repetitions)的因素水準組合。因為分類值不若連續變數來得敏感，所以需要較多的數據；以本實驗  $L_8$  而言，雖每種因素水準組合僅重複20次，但在比較  $A_1$  與  $A_2$  時（即計算因素 A 的主效果），即已有 160 個數據可供使用。表 6 顯示，焊錫過程的直交表設計及實驗結果。

表 6 焊錫過程的直交表設計及實驗結果

| 因子<br>No. | A<br>1 | B<br>2 | A×B<br>3 | C<br>4 | D<br>5 | E<br>6 | F<br>7 | 缺 陷 |    |    |     |
|-----------|--------|--------|----------|--------|--------|--------|--------|-----|----|----|-----|
|           |        |        |          |        |        |        |        | 無   | 有些 | 嚴重 | 計   |
| 1         | 1      | 1      | 1        | 1      | 1      | 1      | 1      | 17  | 2  | 1  | 20  |
| 2         | 1      | 1      | 1        | 2      | 2      | 2      | 2      | 6   | 12 | 2  | 20  |
| 3         | 1      | 2      | 2        | 1      | 1      | 2      | 2      | 8   | 12 | 0  | 20  |
| 4         | 1      | 2      | 2        | 2      | 2      | 1      | 1      | 3   | 11 | 6  | 20  |
| 5         | 2      | 1      | 2        | 1      | 2      | 1      | 2      | 18  | 2  | 0  | 20  |
| 6         | 2      | 1      | 2        | 2      | 1      | 2      | 1      | 4   | 15 | 1  | 20  |
| 7         | 2      | 2      | 1        | 1      | 2      | 2      | 1      | 7   | 13 | 0  | 20  |
| 8         | 2      | 2      | 1        | 2      | 1      | 1      | 2      | 2   | 10 | 8  | 20  |
| 總和        |        |        |          |        |        |        |        | 65  | 77 | 18 | 160 |

表7 印刷電路板鉛錫品直交表實驗數據分析

| 因 子<br>No. |        |        |          |        |        |        |        | 缺 陷 分 數<br>無 Y1<br>有些 Y2<br>嚴重 Y3 | 缺 陷 率<br>P<br>$\log \left( \frac{P}{P_{\max} - P} \right)$<br>$\log \left( \frac{P}{0.47 - P} \right)$ |
|------------|--------|--------|----------|--------|--------|--------|--------|-----------------------------------|--|
|            | A<br>1 | B<br>2 | A×B<br>3 | C<br>4 | D<br>5 | E<br>6 | F<br>7 |                                   |  |
|            |        |        |          |        |        |        |        |                                   |  |
| 1          | +      | +      | +        | +      | +      | +      | +      | 0.85 0.10 0.05                    | 0.1425 -0.361  |
| 2          | +      | +      | +        | -      | -      | -      | -      | 0.30 0.60 0.10                    | 0.245 0.036  |
| 3          | +      | -      | -        | +      | +      | -      | -      | 0.40 0.60 0                       | 0.190 -0.168   |
| 4          | +      | -      | -        | -      | -      | +      | +      | 0.15 0.55 0.33                    | 0.3475 0.453   |
| 5          | -      | +      | -        | +      | -      | +      | -      | 0.90 0.10 0                       | 0.115 -0.490   |
| 6          | -      | +      | -        | -      | +      | -      | +      | 0.20 0.75 0.05                    | 0.240 0.018  |
| 7          | -      | -      | +        | +      | -      | -      | +      | 0.35 0.65 0                       | 0.1975 -0.140  |
| 8          | -      | -      | +        | -      | +      | +      | -      | 0.10 0.50 0.40                    | 0.395 0.722  |
| 和          | 0      | 0      | 0        | 0      | 0      | 0      | 0      | 3.25 3.85 0.90                    | 1.8725 0.07  |
| 平 均        |        |        |          |        |        |        |        |                                   | 0.234 0.009  |
| " - "和     | 0.867  | 1.229  | -0.254   |        |        |        |        |                                   |  |
| " + "和     | -0.797 | -1.159 | 0.324    |        |        |        |        |                                   |  |
| 差 異        | -1.664 | -2.388 | 0.578    |        |        |        |        |                                   |  |
| 效 應        | -0.42  | -0.60  | 0.144    |        |        |        |        |                                   |  |

註 : (1)  $P = 0.10Y_1 + 0.25Y_2 + 0.65Y_3$  ;  
(2)  $\because P_{av} = 0.234$  ;  $P_{\max} = 2P_{av}$

$$(3) \log \left( \frac{P}{0.47 - P} \right) = 0.01 - 0.21B - 0.30C + 0.07E \quad (\text{最佳條件為 } B+C+E=)$$

$$(4) \log \left( \frac{P_{\min}}{0.47 - P_{\min}} \right) = 0.01 - 0.21 - 0.30 - 0.07 = -0.57 ; \text{ or } P_{\min} = 0.101$$

$$(5) P_{\min} = 0.10(0.99) + 0.25(0.01) + 0.65(0) = 0.1015$$

(6) 上兩式中，符號<sup>^</sup> (讀音head) 表示預測之意

表7 顯示，利用表6之原始實驗數據，加上新變數轉換  $Y = \log \left( \frac{P}{P_{\max} - P} \right)$  的處理

結果。然而為了表達分類計數值特性，我們選用加權法，即三種不同的缺陷分數：無 ( $Y_1$ )，有些 ( $Y_2$ ) 及嚴重 ( $Y_3$ )，分別乘上 0.10, 0.25 及 0.65，或

$$P = 0.10Y_1 + 0.25Y_2 + 0.65Y_3 \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

代表混合平均的缺陷率。由式(7)知，新變數  $Y$  的範圍在 0.10 及 0.65 之間，其上下限

值的幾何平均值為  $(0.10 \times 0.65)^{0.5} = 0.255$ ，此與表(7)的  $P_{av}$  實驗值 0.234 相近，所以我們先前假設的加權分數 0.10, 0.25 及 0.65 亦屬合理。

$$Y = \log\left(\frac{P}{0.47-P}\right) = 0.01 - 0.21B - 0.30C + 0.07E \quad (7)$$

由式(7)可得  $Y_{min}$  最佳操作條件為  $B_+ C_+ E_-$ ，而因子 A、D、F 的影響可以略而不計。令  $B=+1$ ,  $C=+1$  及  $E=-1$ , 代入式(7)，可預估在最佳操作條件時，電路板成品之最低的不良率值為

$$\hat{Y} = \log\left(\frac{\hat{P}_{min}}{0.47-\hat{P}_{min}}\right) = -0.57, \text{ 或 } \hat{P}_{min} = 0.101.$$

這相當於印刷電路板成品沒有缺陷的分數  $\hat{Y}_1 = 0.99$ ；配上有些缺陷的， $\hat{Y}_2 = 0.01$ 。就  $Y_1$  值比較而言，這最佳條件印刷電路板成品時的孔洞缺陷情況，比表 7 最好的第 5 次實驗結果好了 10 倍，也比表 7 中的近平均缺陷率 ( $P_{av} = 0.234$ ) 的第 6 次實驗結果好了 20 倍。

## 五、結論

由以上的直交表實驗設計介紹，及其應用於推行工業污染防治的三個例題描述，我們獲得一些結論如下(16)~(17)：

1. 控制因數 3 至 7 時，工程師使用直交表實驗設計，執行第一梯次的 8 或 9 次的實驗及數據分析，通常已足夠掌握關鍵因素，找出最佳操作條件，及預測最佳操作條件時的目標函數值。
2. 工程師學習直交表實驗設計非常輕鬆。若善用直交表觀念及原理去推行工業污染防治更可增強對中小企業業主的說服力及信心。
3. 每一位環境工程師及化學工程師在接受嘗試一項新實驗或解決瓶頸問題時，都應先學會直交表實驗設計，才能既迅速地作好製程改善，又確實地達到工業減廢與資源回收的目的。

## 六、參考資料

- (1) 謝德遠，實驗計畫法的綜合研究，中國鋼鐵公司研究發展處，民國 71 年 6 月。
- (2) S.Wold,R.Carlson, and B.A.Skagerberg. Statistical Optimization as a Means to Reduce Risks in Industrial Processes , The Environmental Professional, Vol.11, pp 127-131, (1989)。
- (3) 胡芷江，化工技術改良 - II 、實驗策略，化工 89 期，62-67 頁，1972 年 6 月。
- (4) G.E.P.Box and N.R.Draper, Empirical Model-Building and Response Surfaces, John Wiley & Sons, Inc, New York, NY, 1987。
- (5) D.J.Wheeler, Understanding Industrial Experimentation, Statistical Process

Controls Inc.,Knoxville, Tenn.37919,U.S.A.,1988。

- (6)姚景星，實驗設計，華泰書局，1989年 9月初版。
- (7)井上清和，田口線上品質工程及線外品管改善方法（參數設計），中國生產力中心，1990， 5。
- (8)王丕承，直交表的建立與直交實驗的配置，中國生產力中心，民國79年 9月。
- (9)染整廢水場化學試驗報表，私人通訊，民國79年 3月。
- (10)陳淑娟，大型巴士如何選位子？民國78年10月18日中國時報。
- (11)謝德遠，如何有效地確認流通新台幣幣值，實驗設計與分析導論講義附錄(一)，中華民國品質管制學會，民國80年 4月。
- (12)陳明德、徐恆文、朱信，溼式石灰石煙道氣除硫技術之研究，工業污染防治第十卷，第四期，35~50頁，民國80年10月。
- (13)蕭清鎮，高總廠工輕改善初餾塔之研究，生產力通報第三期，54~57頁，中油公司企劃處編印，民國78年 3月。
- (14)鍾清章校訂，田口式品質工程導論，第 134頁，中華民國品質管制學會發行，民國78年 3月。
- (15)盛其安、鄭昇芳、楊東和，田口玄一納品質管理於直交表中，戰略生產力雜誌，112~115頁，1990年 5月號。
- (16)謝德遠，參數設計用以宣導工業減廢，中華民國環境工程學會第六屆廢棄物處理技術研討會，243~255頁，民國80年11月。
- (17)蔡國鈞、林金德，廢水處理廠最佳化實務設計之探討，中華民國環境工程學會第十六屆廢水處理技術研討會論文集（下冊），923~934頁，民國80年12月。

## 附錄一

某染整廢水場化學試驗報表 (每次試驗僅變動一個變數)

工 廠 名 稱

填表日期：

| 樣 品 編 號                         |                 | 1          | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
|---------------------------------|-----------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 原<br>水<br>性<br>質                | X <sub>1</sub>  | pH         | 1.5   | 1.5   | 1.5   | 1.5   | 1.5   |
|                                 | X <sub>2</sub>  | COD, mg/l  | 3,520 | 3,520 | 3,520 | 3,520 | 3,520 |
|                                 |                 | SS         |       |       |       |       |       |
|                                 |                 | BOD/TOC    |       |       |       |       |       |
|                                 | Y <sub>1</sub>  | 透視度, CM    | <1    | <1    | <1    | <1    | <1    |
| (I)<br>添<br>加<br>物              | X <sub>3</sub>  | pH         | 3.0   | 3.0   | 3.0   | 3.0   | 3.0   |
|                                 | X <sub>4</sub>  | 劑 量        |       |       |       |       |       |
|                                 | X <sub>5</sub>  | 種 類        |       |       |       |       |       |
|                                 | X <sub>6</sub>  |            | 添加量ml | 5     | 5     | 5     | 5     |
| (II)<br>添加物                     | X <sub>7</sub>  | 加量ml       | 20    | 1.5   | 1.5   | 1.5   | 1.5   |
|                                 | X <sub>8</sub>  | 1st反應時間min | 40    | 40    | 40    | 40    | 40    |
| (III)<br>添<br>加<br>化<br>學<br>品  | X <sub>9</sub>  | 種 類        |       |       |       |       |       |
|                                 | X <sub>10</sub> |            | 添加量ml | 6     | 6     | 6     | 6     |
|                                 | X <sub>11</sub> | 劑 量        |       |       |       |       |       |
|                                 | X <sub>12</sub> | pH         | 9.5   | 9.5   | 9.5   | 9.5   | 9.5   |
|                                 | X <sub>13</sub> | 2nd反應時間min | 60    | 60    | 60    | 60    | 60    |
|                                 | X <sub>14</sub> | 種 類        |       |       |       |       |       |
|                                 | X <sub>15</sub> |            | 添加量ml | 1     | 1     | 1     | 1     |
|                                 | X <sub>16</sub> | 3rd反應時間min | 30    | 30    | 30    | 30    | 30    |
| 處<br>理<br>後<br>水<br>質<br>分<br>析 | Y <sub>2</sub>  | pH         |       |       |       |       |       |
|                                 | Y <sub>3</sub>  | COD, mg/l  | 1,760 | 1,520 | 1,160 | 1,280 | 1,360 |
|                                 |                 | SS         |       |       |       |       |       |
|                                 |                 | BOD/TOC    |       |       |       |       |       |
|                                 | Y <sub>4</sub>  | 透視度, CM    | 7.5   | 8     | 19    | 20    | 30    |

每 Sample 300C.C

實驗目標 : Min Y<sub>3</sub> (X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub> ... X<sub>16</sub>) 及 Max Y<sub>4</sub> (X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub> ... X<sub>16</sub>) , 且大於 30cm。

## 附錄二

某染整廢水場化學試驗報表 (每次試驗僅變動一個變數)

工 廠 名 稱

填表日期：

| 樣 品 編 號                        |                 | 1          | 2     | 3     | 4     | 5     | 6      |
|--------------------------------|-----------------|------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 原<br>水<br>性<br>質               | X <sub>1</sub>  | pH         | 5.3   | 5.3   | 5.3   | 5.3   | 5.3    |
|                                | X <sub>2</sub>  | COD, mg/l  | 1,840 | 1,840 | 1,840 | 1,840 | 1,840  |
|                                |                 | SS         |       |       |       |       |        |
|                                |                 | BOD/TOC    |       |       |       |       |        |
|                                | Y <sub>1</sub>  | 透視度, CM    | <1    | <1    | <1    | <1    | <1     |
| (I)<br>添<br>加<br>物             | X <sub>3</sub>  | pH         | 3.0   | 3.0   | 3.0   | 3.0   | 3.0    |
|                                | X <sub>4</sub>  | 劑 量        |       |       |       |       |        |
|                                | X <sub>5</sub>  | 種 類        |       |       |       |       |        |
|                                | X <sub>6</sub>  |            | 添加量ml | 5     | 5     | 5     | 5      |
| (II)<br>添加物                    | X <sub>7</sub>  | 加量ml       | 10    | 20    | 30    | 40    | 50     |
|                                | X <sub>8</sub>  | 1st反應時間min | 40    | 40    | 40    | 40    | 40     |
| (III)<br>添<br>加<br>化<br>學<br>品 | X <sub>9</sub>  | 種 類        |       |       |       |       |        |
|                                | X <sub>10</sub> |            | 添加量ml | 5     | 5     | 5     | 5      |
|                                | X <sub>11</sub> | 劑 量        |       |       |       |       |        |
|                                | X <sub>12</sub> | pH         | 9.0   | 9.0   | 9.0   | 9.0   | 9.0    |
|                                | X <sub>13</sub> | 2nd反應時間min | 40    | 40    | 40    | 40    | 40     |
|                                | X <sub>14</sub> | 種 類        |       |       |       |       |        |
|                                | X <sub>15</sub> |            | 添加量ml | 1     | 1     | 1     | 1      |
|                                | X <sub>16</sub> | 3rd反應時間min | 30    | 30    | 30    | 30    | 30     |
| 處理後<br>水質<br>分析                | Y <sub>2</sub>  | pH         |       |       |       |       |        |
|                                | Y <sub>3</sub>  | COD, mg/l  | 720   | 440   | 480   | 400   | 360    |
|                                |                 | SS         |       |       |       |       |        |
|                                |                 | BOD/TOC    |       |       |       |       |        |
|                                | Y <sub>4</sub>  | 透視度, CM    | 15    | 20    | 20    | 30    | 30(油層) |

每 Sample 300C.C.

實驗目標：Min Y<sub>3</sub> (X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub> … X<sub>16</sub>) 及 Max Y<sub>4</sub> (X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub> … X<sub>16</sub>)，且大於 30cm。

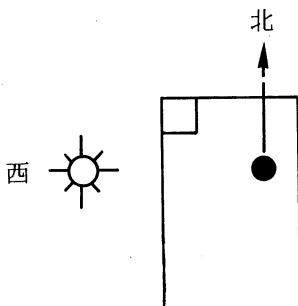
## 附錄三

 $L_8 (2^3)$ 直交表設計應用於搭國光號免曬太陽

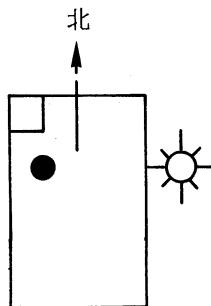
|    |            |          |          |
|----|------------|----------|----------|
| 計畫 | $X_1$ (時間) | 上 午(+)   | 下 午(-)   |
| 執行 | $X_2$ (方向) | 往 北(+)   | 往 南(-)   |
|    | $X_3$ (位置) | 靠 司 機(+) | 靠 車 門(-) |
| 考核 | $Y$ (享受)   | 曬到太陽(+)  | 曬到太陽(-)  |

| 次數 | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1 X_2$ | $X_2 X_3$ | $X_3 X_1$ | $X_1 X_2 X_3$ | $Y$ |
|----|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|---------------|-----|
| 1  | -     | -     | -     | +         | +         | +         | -             | +   |
| 2  | -     | -     | +     | +         | -         | -         | +             | -   |
| 3  | -     | +     | -     | -         | -         | +         | +             | -   |
| 4  | -     | +     | +     | -         | +         | -         | -             | +   |
| 5  | +     | -     | -     | -         | +         | -         | +             | -   |
| 6  | +     | -     | +     | -         | -         | +         | -             | +   |
| 7  | +     | +     | -     | +         | -         | -         | -             | +   |
| 8  | +     | +     | +     | +         | +         | +         | +             | -   |
| 和  | 0     | 0     | 0     | 0         | 0         | 0         | 0             | 0   |

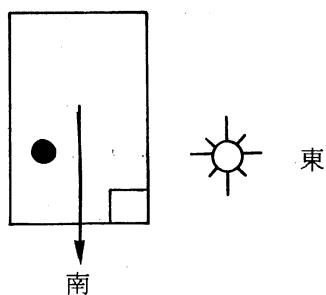
No. 2



No. 8



No. 5



結果： $Y$  只與  $-(X_1 X_2) X_3$  同號。欲  $Y$  為負值所以當時間 ( $X_1$ ) 與方向 ( $X_2$ ) 之積為正，則選擇靠司機一側的位置 ( $X_3$  為 +)，反之當  $X_1 X_2$  為負值，則選擇靠車門的座位。 $(X_3$  為 - )

## 附錄四

以L<sub>8</sub> ( $2^{7-4}$ )直交表進行八次實驗，求出七因子A、B、C、D、E、F、G所代表的新台幣幣值

| 假定幣值，元 | (1000) | (500) | (100) | (50)  | (10)  | (5)   | (1)   | 新台幣<br>總值，元 |
|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| 次      | D      | E     | A     | B     | C     | F     | G     | Y           |
| 1      | 1      | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1666        |
| 2      | 0      | 0     | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 155         |
| 3      | 1      | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 1110        |
| 4      | 0      | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 601         |
| 對稱型態   | ---    | ---   | ---   | ---   | ---   | ---   | ---   |             |
| 5      | 0      | 1     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 560         |
| 6      | 1      | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1051        |
| 7      | 0      | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 16          |
| 8      | 1      | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1505        |
| 組成行    | ac     | bc    | a     | b     | c     | ab    | abc   |             |
| 水準 1之和 | 5,332* | 4,332 | 3,532 | 3,432 | 3,352 | 3,342 | 3,334 | 元           |
| 水準 0之和 | 1,332  | 2,332 | 3,132 | 3,232 | 3,312 | 3,322 | 3,330 | 元           |
| 差異     | 4,000  | 2,000 | 400   | 200   | 40    | 20    | 4     | 元           |
| 效應     | 1,000  | 500   | 100   | 50    | 10    | 5     | 1     | 元           |

\*  $5332 = 1,666 + 1,110 + 1,051 + 1,505$

聯立解出： $Y = 1000D + 500E + 100A + 50B + 10C + 5F + G$  元 (1)

或  $Y = 1000D + 500E + 100A + 50B + 10C + 5F + ABC$  元 (2) 等等

討論：

- (1) 上面的直交表為三因子A、B、C的完全配置。
- (2) 因子交互作用的規則為令水準  $1 = +1$  及  $0 = -1$ ，則因子D、E、F、G行的水準符號  
◦ 可由正負得負，負負得正決定。
- (3) 本例中顯示雖然第G行佔用abc符號，但已知  $100 \times 50 \times 10 \neq 1$  元，故求得迴歸式中的  
係數為因子 G 所獨有。換句話說，式(1)比式(2)正確。
- (4) 上表顯示出上下兩個集區配置三種對稱型態，例如b,c行為重覆排列，ac,c,ac 及 abc  
四行為 fold-over 對稱，a 行為反對稱。

附錄五

## 最小平方和法解迴歸係數（以例題二為範例計算）

假定  $\log Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4$  .....(1)

### 利用最小二乘方和原理

由微積分原理，欲求得各係數  $\alpha$ ， $\alpha_1$ ， $\alpha_2$ ，…… $\alpha_4$  之必要條件為，令

$$\frac{\partial S}{\alpha_0} = \frac{\partial S}{\alpha_1} = \frac{\partial S}{\alpha_2} = \frac{\partial S}{\alpha_3} = \frac{\partial S}{\alpha_4} = 0 \quad \dots \quad (3)$$

遂可聯立解得各係數值：

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_0N + \alpha_1\Sigma X_1 + \alpha_2\Sigma X_2 + \alpha_3\Sigma X_3 + \alpha_4\Sigma X_4 = \Sigma Y \\ \alpha_0\Sigma X_1 + \alpha_1\Sigma X_1^2 + \alpha_2\Sigma X_1X_2 + \alpha_3\Sigma X_1X_3 + \alpha_4\Sigma X_1X_4 = \Sigma X_1Y \\ \alpha_0\Sigma X_2 + \alpha_1\Sigma X_2X_1 + \alpha_2\Sigma X_2^2 + \alpha_3\Sigma X_2X_3 + \alpha_4\Sigma X_2X_4 = \Sigma X_2Y \\ \alpha_0\Sigma X_3 + \alpha_1\Sigma X_3X_1 + \alpha_1\Sigma X_3^2 + \alpha_3\Sigma X_3X_3 + \alpha_4\Sigma X_3X_4 = \Sigma X_3Y \\ \alpha_0\Sigma X_4 + \alpha_1\Sigma X_4X_1 + \alpha_2\Sigma X_4X_2 + \alpha_3\Sigma X_4X_3 + \alpha_4\Sigma X_4^2 = \Sigma X_4Y \end{array} \right\} \quad \text{---(4)}$$

代入表五數據可得

$$8\alpha_0 = 4.211 + 4.176 + 4.043 + \dots + 0.954 = 21.244$$

$$8\alpha_1 = 4.211 + 4.176 + 4.043 + \dots - 0.954 = 11.098$$

$$8\alpha_2 = 4.211 + 4.176 - 4.043 + \dots - 0.954 = 1.086$$

- - (5)

由式(5)可解得

$$\alpha_0 = 2,656$$

$$\alpha_1 = 1.462$$

$$\alpha_2 = 0.136$$

$$\alpha_3 = 0.018$$

$$\alpha_4 = -0.009$$

$$\alpha_{12} = -0.060$$

$$\therefore \log Y = 2.656 + 1.462A + 0.136B + 0.018C - 0.009D - 0.060AB$$